Resume de math

(1)

P	Q	$\bar{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- $\wedge$: et = $\times$ = الضرب
- $\vee$: ou = + = الجمع
- $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{P}$ ou $Q \Leftrightarrow \bar{P} \vee Q$

- tautologie :

- من واحد (1) نقول أن tautologie
هي النتيجة التي يكون فيها الكل يساوي 1 أي صحيح .

exemple :

$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

1
1
1
1 ⟸ Tautologie.

- Types de raisenement :

(طرق البرهان)

- contradiction (نبرهن بالخطأ)
- contraposée (نبرهن بالعكس)

$\Rightarrow$ = تصبح $\neq$

$\forall$ تصبح $\exists$

$\exists$ تصبح $\forall$

$>$ تصبح $<$

$\geq$ تصبح $\leq$

$\in$ تصبح $\notin$

- Récurrence (نبرهن بالتراجع)

$\Rightarrow P(0)$ ✓

$P(n)$ ✓

$P(n+1)$ ✓

ensembles (المجموعات)

$\mathbb{N}$: الأعداد الطبيعية $(0, 1, 2 \ldots)$

$\mathbb{Z}$: الأعداد الصحيحة $(\ldots -1, 0, 2 \ldots)$

$\mathbb{Q}$: الأعداد الناطقة $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$\mathbb{R}$: الأعداد الحقيقية (كل الأعداد)

$\mathbb{C}$: الأعداد المركبة $(z = x + iy)$

$\mathbb{D}$: الأعداد العشرية $(1{,}2 \,,\, -1{,}2)$

علاقات بين المجموعات :

- Inclusion : (الاحتواء) ($\subset$)
  - $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
- Egalité : (التساوي) (=)

E et F deux ensemble $E = F$

- Réunion : (الاتحاد) ($\cup$)
  $E \cup F$
- Intersection : (التقاطع) ($\cap$)
  $F \cap E$
- partition : (التقسيم) ($P(E)$, $\{ \}$)

$E = \{1, 2, 3\}$: $P(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{3$

- Complémentaire : (المتمم) (C_F^E)

C_F^E : $E \cup \bar{E} = F$

et $E \cap \bar{E} = \emptyset$

- Produit : (الضرب) ($\times$)

$E \times F$

- Différence : (الفرق) (/)

$E \setminus F = \{x \in E \text{ avec } x \notin F\}$

- Différence Symétrique (فرق تناظري) ($\setminus \cup \setminus$, Δ)

$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$

$= (E \cup F) \setminus (E \cap F)$

$= \{(x \in E \text{ avec } x \notin F)$ أو العكس

Relation D'équivalence, ordre

pour réflexive : (العكسية)

$\forall x \in E \Rightarrow x R x$

pour Symétrique : (التناظرية)

$\forall x, y \in E \Rightarrow x R y \Rightarrow y R x$

pour Anti-Symétrique : (عكس التناظرية)

$\forall x, y \in E \Rightarrow x R y$ et $y R x \Rightarrow x = y$

pour transitive :

$\forall x, y, z \in E$ $x R y$ et $y R z \Rightarrow x R z$

R, D'équivalence :

- réflexive
- Symétrique ⟸ شروطها
- transitive

- R, d'ordre

- réflexive
- antisymétrique ⟸ شروطها
- transitive

- l'ordre totale : اذا قبلت كل الحالات عامة
- l'ordre partiel : حالة خاصة القبول

---

les bornes : الحدود

$I = [3, 7[$

- Majorant $I = 8, 9, 10 \ldots$
- Minorant $I = 2, 1, 0, -1 \ldots$
- $\sup I = 7$
- $\inf I = 3$

Max I = n'exist pas

Min I = 3

ملاحظة يشترط الانتماء في Max و Min

$7 \notin I$: اذن لا يوجد

$3 \in I$: اذن يوجد 3

Les applications :

- $g \circ f \neq f \circ g$
- Dans le cas général في الحالة العامة
- image d'un partie :

$f(A) = \{ f(x), x \in A \}$

- injectivité :

f est injective :

$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

أو بالعكس : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

و يشترط فيها أن تكون الدالة متزايدة Croissant

- Surjectivité :

f est surjective :

$\forall y \in F, \exists x \in E$ telque : $f(x) = y$

و يشترط فيها الاستمرارية على مجالها

- Bijective :

f est surjective et injective

متزايدة و مستمرة .

- Bijection Réciproque

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = 3x + 5$

$f^{-1}(x) = x = \frac{y-5}{3}$

$\Rightarrow f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \longmapsto \frac{y-5}{3}$

- image Réciproque d'un partie :

$f(B) = \{ x \in E, f(x) \in B \}$

- involution :

$\forall x \in E \quad f(x) = f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f \circ f = f[f(x)] = x$

ou bien $f \circ f = I(x)$ ← application identité.

Propriéter des apps :

Si $A, B \in P(E)$ alors :

$A \subset B \Rightarrow f(A) = f(B)$

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Fonction numériques :

$\forall x \in E, f(x) \leq M$; f est majorée.

$\forall x \in E, f(x) \geq m$, f est minorée

f est bornée si : elle majorée et minorée à la fois.

- f est croissant : $\forall x_1, x_2 \in E$

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- f est décroissant : $\forall x_1, x_2 \in E$

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Strictement décroissant ou croissant $>$ ou $<$.

- f est monotone :

- f est bien croissant

- f est bien décroissant

- f est constant : $\forall x_1, x_2 \in E$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

- f est périodique dans E de période T

$\exists T > 0 ; \forall x \in E, f(x+T) = f(x)$

limite et continuité :

(Continuité) : (الاستمرارية)

$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = f(x_0)$

مثال :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

donc $f(x)$ est continue au point 0 .

Théorème Des valeurs intermédiaires

(مبرهنة القيم الوسطية)

- f continue au I ; $I : [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$f(a) \cdot f(b) \leq 0$

alors il existe une constante $\alpha \in]a, b[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

prolongemat par continuété :

ندرس النهاية للدالة ونحسبها ولكي يكون لدينا prolongemat موجودة يجب أن نتحصل على عدد حقيقي في النتيجة.

مثال : $f : \mathbb{R} - \{0\}$ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

- le prolongement par continuété de la fonction f existe et il est de forme :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Dérivation :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha .$$

مثال : $f(x) = \sin x$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$
$$= 1 \times \cos x_0 = \cos x_0 .$$

ملاحظة : إذا كانت f ليست مستمرة في x_0 فإنه ليس لديها عدد مشتق في x_0

- f تملك عدد مشتق إذا وفقط إذا قبلت في x_0 مشتقات على اليمين واليسار حيث يساوي العدد المشتق α .

Dérivée d'une fonction composée

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot [g'(f(x_0))]$$

مثال : $[\sin(f(x))]' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$

Dérivée d'une fonction réciproque

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}$$

مثال :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

fonction de class C^n :

f de class C^1 :

- f est continue
- f est dérivable
- f' premier dérivée est contiue au intervall.

Théorème de Rolle :

f continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$ telque $f(a) = f(b)$.

Alors il existe une constant c

$$c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

Théorème Des accroisement finis

f est continue au [a, b], f est dérivable au]a, b[alors il exist une constant c ∈]a, b[tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

- Théorème de l'hôpital

f et g est dérivablel au]a, b[

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

formul de taylor youncg :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$